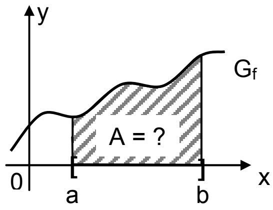
1. Integralrechnung

1.1 Das bestimmte Integral

Problem: Wie bestimmt man den Inhalt der schraffierten Fläche?

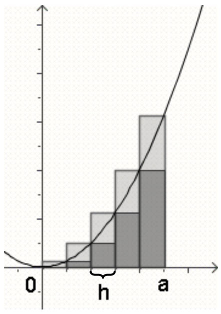
geg.: f(x)

ges.: Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen G_f, der x-Achse und den Geraden x = a und x = b, kurz: $[A]_a^b$



Lösung: Streifenmethode

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{4}x^2$



gesucht: $[A]_0^a$

Idee: - Zerlege [0;a] in n Streifen der Breite $h = \frac{a}{n}$.
- Addiere die Flächeninhalte der hellen Rechtecke → Obersumme S_n
- Addiere die Flächeninhalte der dunklen Rechtecke → Untersumme s_n
- Für den Flächeninhalt A gilt: $s_n < A < S_n$

1. Berechnung der **Obersumme S_n**

$$S_n = h \cdot f(h) + h \cdot f(2h) + h \cdot f(3h) + \ldots + h \cdot f(n\cdot h)$$
$$= h \cdot \{ \frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{4}\cdot(2h)^2 + \frac{1}{4}\cdot(3h)^2 + \ldots + \frac{1}{4}\cdot(n\cdot h)^2 \}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot h^3 \cdot \{ 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 \}$$

siehe FS S. 51: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^3 \cdot \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{a^3}{6} \cdot \frac{n}{n}\cdot\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{(2n+1)}{n}$$
$$= \frac{a^3}{24} \cdot (1+\frac{1}{n})\cdot(2+\frac{1}{n})$$

2. Berechnung der **Untersumme s_n**:

durch analoges Vorgehen erhält man $s_n = \frac{a^3}{24}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot(2-\frac{1}{n})$

3. Für den Flächeninhalt gilt dann: $\frac{a^3}{24}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot(2-\frac{1}{n}) < A < \frac{a^3}{24}\cdot(1+\frac{1}{n})\cdot(2+\frac{1}{n})$ $\quad n \to \infty$

4. Zerlegung des Intervalls [0;a] in immer feinere Streifen $\frac{a^3}{12} \leq A \leq \frac{a^3}{12}$

5. Der gesuchte Flächeninhalt ist also: $A := [A]_0^a = \frac{a^3}{12}$

damit gilt: $\int_0^4 \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{4^3}{12} \approx 5{,}33..$

Definition:

Eine im Intervall [a;b] stetige Funktion f ist über [a;b] **integrierbar**, wenn der Grenzwert der Obersumme S_n für $n \to \infty$ gleich dem Grenzwert der Untersumme s_n für $n \to \infty$ ist.

Dieser Wert heißt das **bestimmte Integral** von f über [a;b].

Kurz: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \int_a^b f(x)dx$